Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 25.06.2015.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. Neka je $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, odredite mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement.

2. Dati su vektori $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ te vektori $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $b_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dokazati da skupovi $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ i $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ čine dvije baze za $\mathbb{R}^3$. Nađite matricu prelaza iz jedne baze u drugu - drugim riječima odredite matricu T takvu da

$$[u]_{\mathcal{A}} = T \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

za proizvoljan vektor $u \in \mathbb{R}^3$ (prisjetimo se da $[u]_{\mathcal{A}}$ označava kolona vektor čiji elementi predstavljaju koordinate vektora u u udnosu na bazu $\mathcal{A}$).

3. Data je determinanta 4-tog reda

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

i neka je t vrijednost date determinante. Diskutovati za koje vrijednosti parametara a i b će proizvod

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + t x_2 y_2 + x_3 y_3$$

biti unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathbb{R}^3$ (gdje su $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ i $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$).

4. Za matricu A odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je $\mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^4$, odredite mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement.

Rj. Prisjetimo se: Za neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora V kažemo da je vektorski potprostor akko vrijedi:

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$

Naš prostor $\mathcal{L}$ je neprazan npr $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$.

Pokažimo da vrijedi (A1) i (M1).

Izaberimo dva proizvoljna $x, y \in \mathcal{L}$ npr. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

Kako su $x, y \in \mathcal{S}$ to
$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
i
$$y_1 + y_2 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0,$$

a odavde nije teško vidjeti da je $x + y \in \mathcal{L} \Rightarrow$ vrijedi (A1)

Za proizvoljno $x \in \mathcal{L}$ $\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)$ također vrijedi
$$\alpha x_1 + \alpha x_2 = 0, \quad \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0, \quad \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 = 0$$

za $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{L} \Rightarrow$ vrijedi (M1).

Prema tome $\mathcal{L}$ jest vektorski potprostor od $\mathbb{R}^4$.

Sad primjetimo da prostor $\mathcal{L}$ možemo zapisati i u drugačijem obliku
$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Pa određivanje (pronalaženje) baze od $\mathcal{L}$ je ekvivalentno pronalaženju baze za $\ker(A)$ gdje je $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$.

Bazu za $\ker(A)$ sačinjavaju kolone iz opšteg rješenja homogenog sistema $Ax=0$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\end{array}\right]\underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\end{array}\right]\overset{III_v-II_v}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_1+x_2=0 \qquad x_1=-x_2$$
$$x_3=0$$
$$x_4=0$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\t\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}t,\quad t\in\mathbb{R}$$

Prema tome baza za $\mathcal{L}$ je skup $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ tj.

$$\mathcal{L}=\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right),$$

a $\dim(\mathcal{L})=1$ (dimenzija od $\mathcal{L}$ je 1).

Ostalo je još da odredimo neki direktni kompliment od $\mathcal{L}$.

Prisjetimo se: Za potprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni potprostori akko

$$\mathcal{V}=\mathcal{X}+\mathcal{Y} \quad i \quad \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\mathbf{0},$$

i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ (za $\mathcal{Y}$ kažemo da je direktni komplement od $\mathcal{X}$ (i obrnuto)).

Isto tako primijetimo te da

$$V = X \oplus Y \iff \forall v \in V \ \exists!\, x \in X,\ y \in Y \text{ t.d. } v = x + y \iff \mathcal{B}_X \cap \mathcal{B}_Y = \emptyset \text{ i } \mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y \text{ je baza za } V$$

(gdje su $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$ redom baze za X i Y)

Ono što mi tražimo je u stvari nadopuna $\overbrace{}^{\text{baze od } \mathcal{L}}$ do baze za $\mathbb{R}^4$!

Kako osnovne kolone u A generišu $\mathrm{im}(A)$ to

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{II_v + I_v} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Direktni komplement od $\mathcal{L}$ je

$$\mathcal{M} = \mathrm{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

(#) Zadani su vektori $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ te $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dokažite da skupovi $\mathcal{A} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ i $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ čine dvije baze za $\mathbb{R}^3$. Nađite matricu prelaza iz jedne baze u drugu – drugim riječima odrediti matricu T takvu da

$$[u]_{\mathcal{A}} = T \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

za proizvoljan vektor $u \in \mathbb{R}^3$ (prisjetimo se $[u]_{\mathcal{A}}$ označava kolona vektor čiji elementi predstavljaju koordinate od u u odnosu na $\mathcal{A}$).

Rj. Da bi pokazali da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dvije baze za $\mathbb{R}^3$ dovoljno je pokazati da su elementi iz ovih skupova linearno nezavisni. Elementi će biti linearno nezavisni akko su odgovarajuće determinante različite od nule.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{III_k - I_k}{\overset{II_k - I_k \cdot 2}{=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-3+4) = -1$$

Dati skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su linearno nezavisni

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ čine dvije baze za $\mathbb{R}^3$

Iz elementarne teorije znamo da ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ gdje su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ tada za $\forall u \in \mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}$$

Prema tome ono što mi trebamo odrediti je $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{A}} & [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{A}} & [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{A}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Ali kako nam T nije poznato zadatku možemo pristupiti na drugačiji način. (Točnije T je poznato ali nije odmah vidljivo što je. Vidjećemo da je T u stvari I).

Iz lekcije promjena baze i sličnost prisjetimo se sljedeće tvrdnje:

Ako su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za $\mathcal{V}$ i ako je $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

tada je $[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}$ za svaki $v \in \mathcal{V}$.

U našem slučaju mi tražimo

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [\vec{b}_1]_{\mathcal{A}} & [\vec{b}_2]_{\mathcal{A}} & [\vec{b}_3]_{\mathcal{A}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Time se sva težina zadatka svodi u tome da vektore $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ i $\vec{a_3}$ moramo izraziti preko vektora $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ i $\vec{b_3}$. U stvari imamo tri sistema linearnih jednačina

(i)
$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}x=0\\ y=1\\ z=-1\end{array}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}x=1\\ y=0\\ z=-1\end{array}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}-6\\-4\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}x=1\\ y=-2\\ z=0\end{array}$$

Odavde nije teško vidjeti da je

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$ traženo rješenje

Lagana provjera. Neka je $[u]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Tada je $u=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-2\end{pmatrix}$

$[u]_{\mathcal{S}}$ gdje je $\mathcal{S}$ standardna baza za $\mathbb{R}^2$ $(\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\})$

S druge strane

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow [u]_{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$ A ovo povlači $u=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

\# Data je determinanta 4-og reda $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ i neka je t vrijednost date determinante.

Diskutovati za koje vrijednosti parametara a i b će proizvod

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + t x_2 y_2 + x_3 y_3$$

biti unutrašnji proizvod za $\mathbb{R}^3$ (gdje su $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$).

Rj. Prisjetimo se definicije unutrašnjeg proizvoda:

Unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava uređen par vektora x, y u realni skalar $\langle x, y\rangle$ tako da vrijede sljedeće četiri osobine

(i) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_0^+$, $\langle x, x\rangle = 0$ akko $x = 0$

(ii) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \quad \forall \alpha$

(iii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

(IV) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

Pa ispitajmo da li vrijede četiri osobine iz definicije i postavimo ograničenja na t usput:

(i) $\langle x, x\rangle = x_1x_1 + t x_2x_2 + x_3x_3 = x_1^2 + x_3^2 + t x_2^2$

Da bi $\langle x, x\rangle$ bio ≥ 0 primijetimo da $t \geq 0$

(ako bi t bio negativan tada bi mogli naći x_1, x_2 i x_3 tako da $\langle x, x\rangle$ bude < 0). S druge strane

$\langle x, x\rangle = 0$ akko $t > 0$ (za $t = 0$ $\exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ t.d. $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x \neq 0$)

Nije teško vidjeti da (ii), (iii) i (iv) osobina ne zavise od vrijednosti parametra t (za $t>0$).

Prema tome dati proizvod će biti unutrašnji proizvod za one parametre a i b za koje vrijedi da je vrijednost determinante t veća od 0. Pa izračunajmo vrijednost determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{=\!=}{\overset{I_k+(II_k+III_k+IV_k)}{=\!=}} \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 \\ a+b & a & b & 0 \\ a+b & 0 & a & b \\ a+b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{III_v-I_v \\ IV_v-I_v}}{\overset{II_v-I_v}{=\!=}} (a+b) \begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & b & 0 \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & -b & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} a-b & b & 0 \\ -b & a & b \\ -b & 0 & a \end{vmatrix} \underset{=\!=}{\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=}}$$

$$= (a+b) \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a & b \\ a-b & 0 & a \end{vmatrix} \overset{I_k-II_k}{=\!=} (a+b) \begin{vmatrix} a-b & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a-b & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \dots = (a+b)(a-b)\underbrace{(a^2+b^2)}_{\geq 0}$$

$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=0$ akko $a=-b$, $a=b$ i $(a,b)=(0,0)$. Pa fiksirajmo $b\neq 0$, $b>0$.

a	$(-\infty,-b)$	$(-b,0)$	$(0,b)$	$(b,+\infty)$
$a+b$	$-$	$+$	$+$	$+$
$a-b$	$-$	$-$	$-$	$+$
a^2+b^2	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$-$	$+$

Dati proizvod će biti unutrašnji proizvod za $\mathbb{R}^3$ akko $(a,b)\neq(0,0)$ i ako vrijedi da je $b>0$ i $a\in(-\infty,-b)\cup(b,+\infty)$ ili ako je $b<0$ tada $a\in(-\infty,b)\cup(-b,+\infty)$.

(#) Za matricu A odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rj. Prisjetimo se:

Ako $n \times n$ matrica A sa elementima iz $\mathbb{R}$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ koje ne moraju biti različite, i ako ima svojstvene vektore $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ takve da je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linearno nezavisan skup, tada

$$P^{-1}AP = D$$

gdje su

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad i \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pa da bi odredili matricu P prvo moramo odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti

$Av = \lambda v$

$(A - \lambda I)v = 0$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_r + III_r}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{III_k - II_k}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + II_k}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{1-\lambda-2} = \lambda(1-\lambda)(\lambda+1)$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$.

$\lambda_1=-1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} x_1-2x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ \hline x_1=2x_3 \\ x_2=-x_3 \end{array}$$

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_1 je $v_1=\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

$\lambda_2=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x_1=x_3 \\ x_2=-x_3 \end{array}$$

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_2 je $v_2=\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

$\lambda_3=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x_1=-x_3 \\ x_2=-2x_3 \end{array}$$

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_3 je $\underline{v_3}=\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Prema tome tražena matrica P je

$$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lagana provjera pokazuje da je $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$